

# 静电力对微米颗粒团稳定性影响的数值模拟

阮璇 李水清

(热科学与动力工程教育部重点实验室, 清华大学能源与动力工程系, 北京 100084)

**摘要** 在静电除尘器等工业设备中, 静电相互作用普遍存在并显著影响微米颗粒的动力学行为。在静电计算中, 常用的点电荷模型在颗粒互相靠近后不再适用, 导致预测颗粒运动时出现偏差。因此, 本文采用边界元法精确求解荷电颗粒间的静电力, 并基于边界元-离散动力学耦合方法模拟单颗粒与荷电颗粒团的碰撞过程, 进而讨论静电力对颗粒团聚的影响机制。研究发现, 颗粒表面诱导电荷能够增强荷电颗粒团稳定性。同时, 在静电力驱动下, 颗粒团结构在碰撞后不断动态演变, 保持较为疏松的结构。

**关键词** 微米颗粒; 团聚; 范德华力; 静电相互作用

**中图分类号:** TK123 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-231X(2022)11-3005-06

## Numerical Simulation on the Effects of Electrostatic Force on the Stability of Agglomerates Formed by Microparticles

RUAN Xuan LI Shuiqing

(Key Laboratory for Thermal Science and Power Engineering of Ministry of Education, Department of Energy and Power Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** In industrial devices such as the electrostatic precipitator, the electrostatic interaction widely exists and significantly affects the dynamic behavior of microparticles. The commonly used point-charge model in the electrostatic calculation is no longer valid if particles are close to each other, leading to deviations when predicting particle motions. Therefore, the boundary element method is employed to accurately account for the electrostatic force between charged particles in the present study. The boundary element method-discrete element method coupled approach is applied to simulate the collision between a single particle and a charged agglomerate, based on which the influence of the electrostatic force on particle agglomeration is discussed. It is revealed that, the induced surface charge could enhance the stability of the charged agglomerate. Moreover, driven by the electrostatic force, the agglomerate undergoes dynamic structural evolutions after the collision while retaining a relatively loose structure.

**Key words** microparticle; agglomeration; van der waal force; electrostatic interaction

## 0 引言

微米颗粒流在工业应用及自然现象中普遍存在, 常见于化工设备中颗粒流的输运<sup>[1]</sup>、含尘烟气中的污染物脱除<sup>[2,3]</sup>、自然界中的扬尘<sup>[4]</sup>以及宇宙中的星体形成过程<sup>[5,6]</sup>。除颗粒与流体间的相互作用之外, 颗粒群的动力学行为往往会受到颗粒间微观相互作用的影响, 如范德华力、液桥力等。特别的, 由于摩擦荷电以及工业中的人为荷电, 固体颗粒往往携带一定量的电荷, 从而引入了长程的静电相互作用<sup>[7,8]</sup>。对于微米颗粒, 长程的静电相互作用能够在无接触的情况下改变颗粒行为, 从而影响颗粒的输运和团聚行为。因此, 针对静电作用下颗粒碰撞及团聚过程的深入研究, 对揭示荷电颗粒

运动机制、为相关应用提供理论支持具有积极意义。

针对大规模荷电颗粒群的模拟工作往往将颗粒携带的电荷近似为点电荷, 颗粒间的静电相互作用简化为库伦力<sup>[9,10]</sup>。当颗粒间隔较近时, 该近似模型无法准确考虑颗粒表面电荷分布对静电力的影响, 使得颗粒的行为预测出现偏差<sup>[5,11,12]</sup>。针对点电荷模型的局限性, 本文采用边界元法 (boundary element method, BEM) 解析外电场作用下颗粒表面电荷的动态变化, 进而更为准确的计算颗粒间的静电相互作用。基于边界元法与离散动力学方法 (discrete element method, DEM) 的耦合计算, 对单颗粒与荷电颗粒团的碰撞团聚过程进行研究, 建立颗

收稿日期: 2022-07-11; 修订日期: 2022-10-22

基金项目: 国家自然科学基金委杰出青年项目 (No.51725601)

作者简介: 阮璇 (1994-), 男, 博士研究生, 从事微米颗粒动力学研究。

通信作者: 李水清, 教授, lishuiqing@tsinghua.edu.cn。

粒团临界破碎速度、颗粒团稳态结构与颗粒间静电相互作用的关联。

## 1 模拟方法

### 1.1 粘附性颗粒的离散动力学方法

本文采用离散动力学方法模拟微米颗粒的运动过程，颗粒的控制方程为

$$m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{C,ij} + \mathbf{F}_{E,i} \quad (1a)$$

$$I \frac{d\boldsymbol{\Omega}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{M}_{C,ij} + \mathbf{M}_{E,i} \quad (1b)$$

式中， $m$  和  $I$  分别为颗粒的质量和转动惯量， $\mathbf{v}_i$  和  $\boldsymbol{\Omega}_i$  是颗粒  $i$  的平动速度和转动速率， $\mathbf{F}_{C,ij}$  和  $\mathbf{M}_{C,ij}$  是颗粒  $j$  对颗粒  $i$  施加的接触力和力矩， $\mathbf{F}_{E,i}$  和  $\mathbf{M}_{E,i}$  是颗粒  $i$  所受的静电力和力矩。本文关注静电相互作用对颗粒团聚物结构稳定性的影响，因此颗粒间的接触相互作用仅考虑法向力  $F_{ij,n}$  和切向力  $F_{ij,t}$ ，以及由切向力导致的转矩  $\mathbf{M}_{C,ij} = r_p F_{ij,t} (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau})$ ：

$$F_{ij,n} = F_{ij,ne} + F_{ij,nd} = 4F_C [(a/a_0)^3 - (a/a_0)^{3/2}] + \eta_n \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n} \quad (2a)$$

$$F_{ij,t} = \mu_F |F_{ij,n}| \quad (2b)$$

法向接触力包含法向弹性力  $F_{ij,ne}$  和法向耗散力  $F_{ij,nd}$ 。法向弹性力根据 Johnson-Kendall-Roberts 理论确定，其中  $F_C = 3\pi\gamma R$  是临界拉脱力， $a/a_0$  是两颗粒间的接触半径与无外载荷时的接触半径的比值，表面能  $\gamma$  由颗粒的材质决定， $R$  是两接触颗粒间的等效半径<sup>[13]</sup>。法向耗散力与两颗粒的法向相对速度  $\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{n}$  成正比，耗散系数  $\eta_n$  与弹性恢复系数  $e$  关联。切向力则采用静摩擦模型，假设其大小与法向力成正比，摩擦系数  $\mu_F = 0.3$ 。 $\mathbf{n}$  和  $\boldsymbol{\tau}$  分别为法向和切向的单位向量。离散动力学模型的具体细节请参阅文献 [2], [8], [14]。

### 1.2 静电相互作用的边界元法

对于荷电颗粒，其表面的电荷密度  $\sigma$  包含两部分，即

$$\sigma = \sigma_f + \sigma_b \quad (3)$$

式中， $\sigma_f$  为颗粒表面的自由电荷密度， $\sigma_b$  为外场及自由电荷作用下由于颗粒极化产生的诱导电荷密度。在实际模拟中可认为自由电荷在颗粒表面均匀

分布，即  $\sigma_f = q/(4\pi r^2)$ ， $q$  是颗粒携带的总电荷量。表面诱导电荷密度的控制方程如下<sup>[11]</sup>

$$\mathbf{A}\sigma_b = \mathbf{b} \quad (4)$$

式 (4) 左侧为诱导电荷的线性项，可展开为

$$\mathbf{A}\sigma_b = \bar{\kappa}\sigma_b + \varepsilon_0 \Delta\kappa \mathbf{E}_b \cdot \mathbf{n} \quad (5)$$

式中， $\bar{\kappa} = (\kappa_p + \kappa_0)/2$  和  $\Delta\kappa = \kappa_0 - \kappa_p$  分别为空气相对介电常数  $\kappa_0$  与颗粒相对介电常数  $\kappa_p$  的平均值和差值。 $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$  F/m 为真空介电常数， $\mathbf{n}$  是颗粒表面的外法向量， $\mathbf{E}_b$  为诱导电荷在颗粒表面  $\mathbf{r}_i$  处产生的电场，即

$$\mathbf{E}_b(\mathbf{r}_i) = \int_S \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3} \sigma_b(\mathbf{r}_j) dS \quad (6)$$

式中  $S$  是系统中所有表面的集合。式 (4) 右侧为自由电荷以及外电场的贡献

$$\mathbf{b} = (1 - \bar{\kappa})\sigma_f - \varepsilon_0 \Delta\kappa (\mathbf{E}_f + \mathbf{E}_{\text{ext}}) \cdot \mathbf{n} \quad (7)$$

式中， $\mathbf{E}_f$  可根据自由电荷密度  $\sigma_f$  类似式 (6) 求得， $\mathbf{E}_{\text{ext}}$  为外电场的场强。在模拟过程中，根据颗粒的荷电量确定自由电荷密度  $\sigma_f$ ，通过快速多极法与广义最小余数法 (FMM-GMRES) 迭代求解式 (4)<sup>[11,15]</sup>，获得颗粒表面的诱导电荷分布  $\sigma_b$ ，进而对颗粒表面积分得到每个颗粒所受的静电力和力矩

$$\mathbf{F}_{E,i} = \int_{S_i} \kappa_0 (\sigma_f + \sigma_b) \mathbf{E} dS_i \quad (8a)$$

$$\mathbf{M}_{E,i} = \int_{S_i} \kappa_0 (\sigma_f + \sigma_b) \mathbf{r} \times \mathbf{E} dS_i \quad (8b)$$

式中， $\mathbf{E}$  是表面微元处的总场强， $\mathbf{r}$  是由颗粒质心指向表面微元处的径向矢量， $S_i$  是颗粒  $i$  的表面。此外，系统的静电势能  $U$  可以由下式给出

$$U = \frac{1}{2} \int_S \varphi(\mathbf{r}) \sigma_f(\mathbf{r}) dS \quad (9)$$

式中， $\varphi(\mathbf{r})$  为位于  $\mathbf{r}$  处表面元的电势。

### 1.3 模拟工况

本文模拟参数见表 1。选取  $10 \mu\text{m}$  作为颗粒半径，其余颗粒物性与二氧化硅颗粒接近<sup>[8]</sup>。颗粒表面自由电荷密度取值与相关实验研究中报道的荷电量测量值可比拟，不同颗粒介电常数 ( $\kappa_p = 1/2.5/15$ ) 分别对应未极化颗粒、 $\text{SiO}_2$  颗粒以及  $\text{ZrO}_2\text{-SiO}_2$  颗粒<sup>[5]</sup>，颗粒周围介质为空气。

表 1 模拟参数  
Table 1 Simulation parameters

参数	数值
颗粒半径 $r_p/\mu\text{m}$	10
颗粒密度 $\rho_p/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	2500
表面能密度 $\nu/\text{mJ}\cdot\text{m}^{-2}$	10
自由电荷密度 $\sigma_f/\mu\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$	$\pm 10$
颗粒相对介电常数 $\kappa_p$	1/2.5/15
空气相对介电常数 $\kappa_0$	1

模拟系统如图 1 所示, 为避免颗粒团聚物结构差异对结果的影响, 本文中采用包含 4 个单颗粒的规则结构。初始时刻颗粒团处于静止状态, 单颗粒从颗粒团侧面以速度  $v_{in}$  射向颗粒团质心, 同时沿  $y$  轴正方向有一个较小的偏心距  $\Delta y/r_p=5\%$ 。

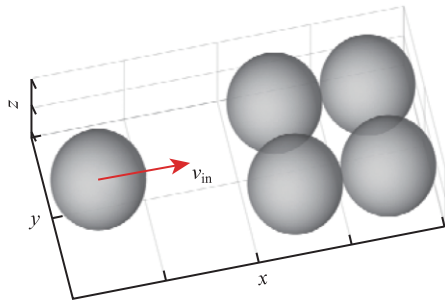


图 1 模拟系统

Fig. 1 Simulation system

## 2 结果与讨论

### 2.1 单颗粒-中性颗粒团的碰撞过程

首先分析单颗粒与中性颗粒团的碰撞过程, 作为与荷电情况下碰撞过程对比的基准。在中性条件下, 颗粒团的结构仅依靠颗粒间的接触力维持。当入射颗粒与颗粒团发生碰撞后, 原本静止的颗粒团开始运动, 颗粒团内部颗粒之间彼此挤压和反弹。若碰撞较为剧烈, 在反弹过程中颗粒间的法向重叠量一旦超过临界拉脱距离  $\delta_C=(a_0)^2/[2(6)^{1/3}R]$ , 两颗粒间的接触即发生断裂。若初始颗粒团中的一部分颗粒与其余部分完全脱离, 则认为该颗粒团发生了破碎。与此相反, 若颗粒从碰撞中获得的动能较小, 将不会导致拉脱。两接触颗粒将经历一个逐步衰减的反复挤压-反弹过程, 直至颗粒间相对动能被完全耗散。

图 2 展示了不同入射速度  $v_{in}$  下的碰撞过程。当  $v_{in}=0.05 \text{ m/s}$  (图 2(a,d,g)), 由于入射速度较小, 入射颗粒碰撞后直接粘附, 颗粒团结构未发生明显改变。当入射速度增至  $v_{in}=0.10 \text{ m/s}$  时, 碰撞使得部分颗粒间接触断裂, 导致颗粒团重构 (图 2(b,e,h)),

但仍不足以使颗粒团发生破碎。当入射速度增大到  $v_{in}=0.20 \text{ m/s}$  后, 颗粒团在经历碰撞后发生破碎 (图 2(c,f,i))。利用二分法对不同入射速度工况进行模拟, 进一步得到中性颗粒团破碎的临界破碎速度  $v_{crit}=0.176 \text{ m/s}$ 。当入射速度达到这一临界值, 颗粒团将发生破碎。

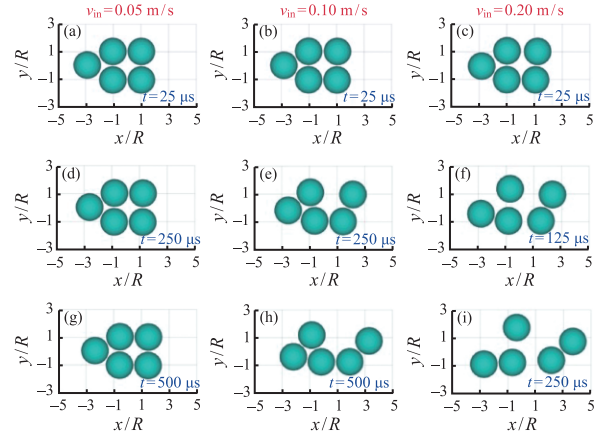


图 2 不同入射速度下的单颗粒-中性颗粒团碰撞过程

Fig. 2 Collision processes between a single particle and a neutral agglomerate with different incident velocities

### 2.2 荷电颗粒团的临界破碎速度

在 2.1 节基础上, 本节讨论静电相互作用对颗粒团临界破碎速度的影响。图 3(a)~(c) 展示了单颗粒与荷电颗粒团发生碰撞的过程。在碰撞发生前, 颗粒团中带正负电荷的颗粒交错排布, 形成稳定的结构 (图 3(a))。由于颗粒介电常数为  $\kappa_p=1$ , 颗粒不会被极化, 因此表面始终为均匀分布的自由电荷, 颗粒间的静电相互作用退化为两点电荷间的库仑力 [16]。图 3(d) 是系统无量纲静电势能  $U/U_0$  随时间的变化趋势, 其中  $U_0=2\pi r_p^3 \sigma_f^2 / \epsilon_0$  是特征静电势能,  $U$  由式 (9) 计算得到。由于引入了静电相互作用, 当碰撞发生后, 原本保持接触的异号颗粒需要克服静电力做功, 使得系统的静电势能快速上升, 如图 3(d) 中 0 ms 至 0.5 ms 所示。如果颗粒从碰撞中获得的相对动能能够同时克服静电引力和接触力, 颗粒将逃逸, 反之则停留在颗粒团中。图 3(c) 表明, 对当前模拟情况, 入射速度  $v_{in}=0.18 \text{ m/s}$  不足以使颗粒团发生破碎。在入射颗粒粘附后, 由于模拟中不存在流体曳力, 系统的动能不会迅速衰减为零, 颗粒团结构将持续发生动态调整, 对应的静电势能不断波动。

当介电常数较大时 ( $\kappa_p=15$ ), 颗粒表面极易在电场作用下产生诱导电荷。如图 4(a) 所示, 两极性相反颗粒间互相靠近部分的电荷密度将显著高于初

始自由电荷密度，使得颗粒间的静电引力被进一步增强。与  $\kappa_p=1$  情况类似，颗粒需要克服静电引力才能发生相对运动，导致碰撞发生后系统静电势能的迅速上升(图 4(d))。同时，在粘附发生后，由于颗粒团的继续运动和重构，系统静电势能也不断波动。值得注意的是，随着介电常数增大，系统中可存储的静电势能显著升高。当  $\kappa_p$  等于 1 时，碰撞导致的能量跃升  $\Delta U$  约为  $(25\sim 30)U_0$ ，而  $\kappa_p$  增大至 15 时，能量跃升  $\Delta U$  变为  $(40\sim 50)U_0$ 。这表明对于相同的自由电荷密度，较大介电常数的颗粒团能够通过静电势能容纳更多输入能量，因此其结构也

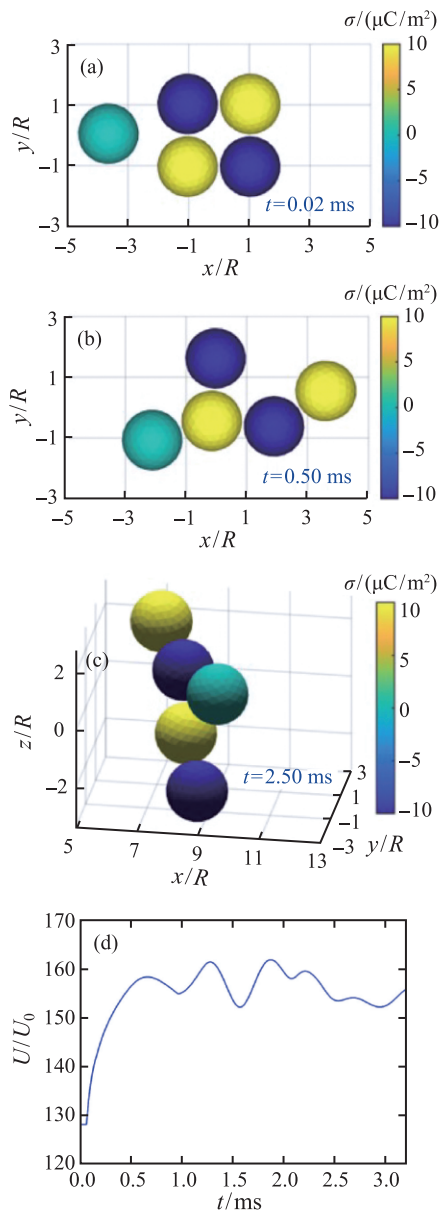


图 3  $\kappa_p=1$ ,  $v_{in}=0.18$  m/s 时的单颗粒-荷电颗粒团碰撞过程 (a)~(c) 以及系统无量纲静电势能的时间演化曲线 (d)  
Fig. 3 Collision between a single particle and a charged agglomerate (a)~(c); temporal evolution of the dimensionless electrical potential energy (d) with  $\kappa_p=1$ ,  $v_{in}=0.18$  m/s

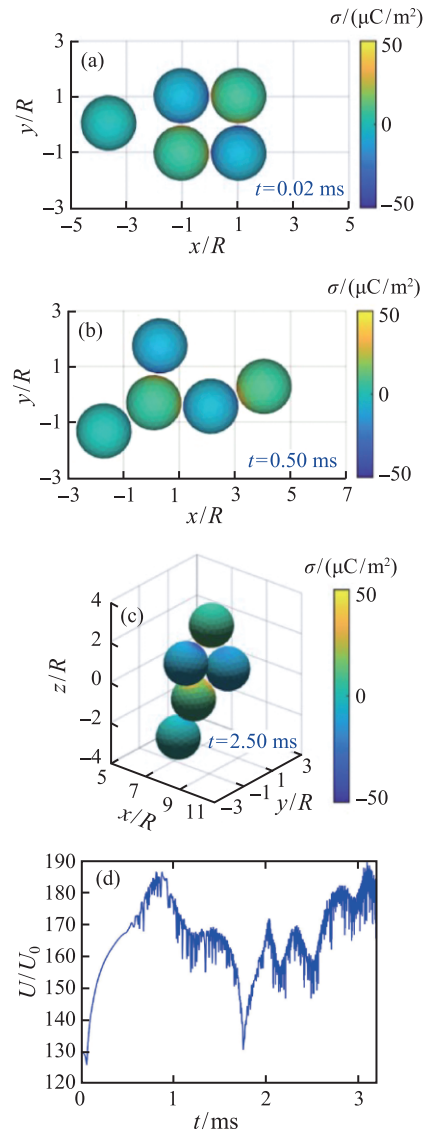


图 4  $\kappa_p=15$ ,  $v_{in}=0.18$  m/s 时的单颗粒-荷电颗粒团碰撞过程 (a-c) 以及系统无量纲静电势能的时间演化曲线 (d)  
Fig. 4 Collision between a single particle and a charged agglomerate (a-c); temporal evolution of the dimensionless electrical potential energy (d) with  $\kappa_p=15$ ,  $v_{in}=0.18$  m/s

表 2 不同颗粒介电常数下的临界入射速度  
Table 2 Critical incident velocities under different particle dielectric constants

$\kappa_p$	$v_{crit}/m \cdot s^{-1}$
1	0.197
2.5	0.216
15	0.224

更加稳定。通过对不同  $\kappa_p$  和  $v_{in}$  的碰撞过程模拟，可获得不同介电常数下的临界破碎速度  $v_{crit}$  (见表 2)。随着  $\kappa_p$  增长，颗粒团的临界破碎速度逐渐提高，与上述分析吻合。

### 2.3 静电对颗粒团形态的影响分析

在团聚过程中, 颗粒团的结构演化会改变其迁移特性以及等效碰撞面积, 从而影响后续团聚过程。因此, 本小节对碰撞后形成的颗粒团结构进行对比。等效碰撞球常被用于描述非球形颗粒团的碰撞行为<sup>[17]</sup>, 其中颗粒团的等效碰撞半径由回转半径  $R_g$  给出

$$R_g = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c)^2 \right]^{1/2} \quad (10)$$

式中,  $\mathbf{x}_i$  为颗粒  $i$  的质心位置,  $\mathbf{x}_c$  是颗粒团的质心位置,  $N$  为颗粒团中包含的颗粒数目。

图 5 对比了不同荷电情况下, 颗粒团回转半径随时间的变化。碰撞时刻用黑色虚线表示, 灰色虚线对应中性颗粒以  $v_{in}=0.175$  m/s 入射的情况, 在发生碰撞后颗粒团内部接触断裂但并未破碎, 导致回转半径增大 (类比图 2(e), (h))。随后颗粒团继续变形并建立了新的接触, 使得回转半径减小。由于没有静电力, 在颗粒团达到新的稳态后, 其结构一直保持不变,  $R_g$  曲线保持水平。红线和蓝线分别对应入射速度  $v_{in}=0.18$  m/s 时介电常数为  $\kappa_p=1$  和  $\kappa_p=15$  的荷电工况,  $\kappa_p=2.5$  的曲线趋势相近未画出。由于入射速度超过了中性颗粒的临界破碎速度, 仅靠接触力无法保持颗粒团稳定, 因此颗粒团一直保持动态演化, 其回转半径也不断波动。由图 3(c) 和图 4(c) 可以看到, 这一过程中的颗粒团结构较为松散, 回转半径较大, 因此在后续团聚过程中更容易与其他颗粒或颗粒团发生碰撞。另一方面也应注意, 图 5 中展示的波动状态为颗粒通过不断碰撞以耗散动能的暂态过程。在实际团聚过程中, 随着颗粒团的不断动态演变, 颗粒间的非弹性碰撞以及周围流体的拖曳能够不断耗散动能, 最终使颗粒间的

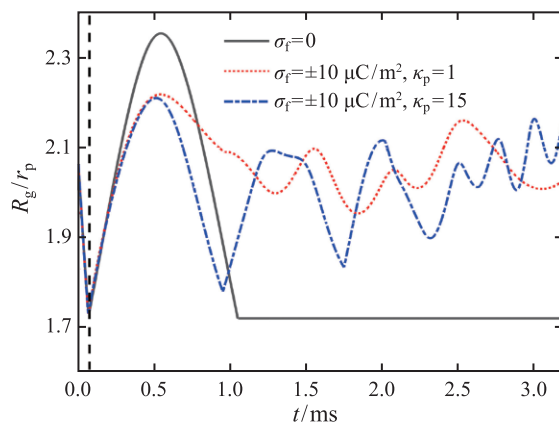


图 5 不同介电常数下颗粒团回转半径时间演化曲线  
Fig. 5 Temporal evolution of the gyration radius of agglomerates with various dielectric constants

相对运动停止。在该情况下, 颗粒团将在静电力的作用下逐步坍塌, 并形成局部静电势能最小的紧密颗粒团结构。

## 3 结 论

本文基于边界元法与离散动力学的耦合计算, 开展静电相互作用对颗粒-颗粒团碰撞过程影响的数值模拟研究, 描述了不同入射速度、荷电情况以及颗粒介电常数下的碰撞结果, 并对比了动态稳定下颗粒团的结构差异。主要结论如下:

1) 中性颗粒团的稳定性来源于颗粒间的接触力, 当碰撞输入的能量足够大, 颗粒间接触的断裂导致颗粒团重构甚至破碎。相比于中性颗粒团, 当引入静电相互作用后, 颗粒的分离过程需要克服额外的静电引力, 因而增强了荷电颗粒团的稳定性。

2) 当颗粒的介电常数  $\kappa_p$  大于 1 时, 颗粒表面将会产生诱导电荷。诱导电荷能够增强异号颗粒间的静电吸引力, 使得颗粒团的临界破碎速度  $v_{crit}$  进一步增大。

3) 相比于中性颗粒, 荷电颗粒间的静电相互作用会驱动颗粒团不断重构, 因此颗粒团将保持较长时间的动态变化。该过程将会使荷电颗粒的团聚过程显著区别于中性颗粒。

## 参 考 文 献

- [1] Kolehmainen J, Ozel A, Gu Y, et al. Effects of Polarization on Particle-laden Flows [J]. *Physical Review Letters*, 2018, 121: 124503
- [2] Li S, Marshall J. Discrete Element Simulation of Micro-particle Deposition on a Cylindrical Fiber in an Array [J]. *Journal of Aerosol Science*, 2007, 38: 1031-1046
- [3] 陈晟, 刘文巍, 杨萌萌, 等. 静电与流体作用下微米颗粒团迁移机理研究 [J]. *工程热物理学报*, 2018, 39(1): 114-118  
CHEN Sheng, LIU Wenwei, YANG Mengmeng, et al. Evolution of Migrating Micro-Particle Cloud With Hydrodynamic and Electrostatic Interactions [J]. *Journal of Engineering Thermophysics*, 2018, 39(1): 114-118
- [4] Zhang H, Zhou H. Reconstructing the Electrical Structure of Dust Storms from Locally Observed Electric Field Data [J]. *Nature Communications*, 2020, 11: 5072
- [5] Lee V, Waitukaitis S, Miskin M, et al. Direct Observation of Particle Interactions and Clustering in Charged Granular Streams [J]. *Nature Physics*, 2015, 11: 733-737
- [6] Steinpilz T, Joeris K, Jungmann F, et al. Electrical Charging Overcomes the Bouncing Barrier in Planet Formation [J]. *Nature Physics*, 2020, 16: 225-229
- [7] Forward K, Lacks D, Sakaran M. Charge Segregation Depends on Particle Size in Triboelectrically Charged Granular Materials [J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102: 028001
- [8] Marshall J, Li S. *Adhesive Particle Flow: a Discrete-element Approach* [M]. New York: Cambridge University Press, 2014

- [9] Chen S, Liu W, Li S. Scaling Laws for Migrating Cloud of Low-Reynolds-number Particles with Coulomb Repulsion [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2018, 835: 880–897
- [10] Ruan X, Chen S, Li S. Effect of Long-range Coulomb Repulsion on Adhesive Particle Agglomeration in Homogeneous Isotropic Turbulence [J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 915: A131
- [11] Barros K, Sinkovits D, Luijten E. Efficient and Accurate Simulation of Dynamic Dielectric Objects [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 2014, 140: 064903
- [12] Lindgren E, Stamm B, Maday Y, et al. Dynamic Simulations of Many-body Electrostatic Self-assembly [J]. *Philosophical Transactions of The Royal Society A*, 2018, 378: 20170143
- [13] Johnson K, Kendall K, Roberts A. Surface Energy and the Contact of Elastic Solids [J]. *Proceedings of The Royal Society A*, 1971, 324: 301–313
- [14] Li S, Marshall J, Liu G, et al. Adhesive Particulate Flow: The Discrete-element Method and Its Application in Energy and Environmental Engineering [J]. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2011, 37: 633–668
- [15] Greengard L, Rokhlin V. A Fast Algorithm for Particle Simulations [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 73: 325–348
- [16] Ruan X, Gorman M, Li S. Surface-resolved Dynamic Simulation of Charged Non-spherical Particles. *Journal of Computational Physics*, 2022, 466: 111381
- [17] Chen S, Li S, Marshall J. Exponential Scaling in Early-stage Agglomeration of Adhesive Particles in Turbulence [J]. *Physical Review Fluids*, 2019, 4: 024304